線形代数（解答）

（2010 年度後学期期末試験：2011 年２月８日）

【１】次に示す$\mathbb{R}^3$の部分集合は、$\mathbb{R}^3$の線形部分空間であるかどうか調べよ。また、線形部分空間である場合には、その基底と次元を求めよ。

① $W_1 = \left\{ \mathbf{x} = {}^t\left[x_1, x_2, x_3\right]; x_1 - x_2 = 0 \right\}$

② $W_2 = \left\{ \mathbf{x} = {}^t\left[x_1, x_2, x_3\right]; x_1 - x_2 + x_3 = 1 \right\}$

（解答）① $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W_1 \quad \Rightarrow \quad x_1 - x_2 = 0,\ y_1 - y_2 = 0$

$(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = 0$

$\alpha \in \mathbf{K} \quad \alpha x_1 - \alpha x_2 = \alpha(x_1 - x_2) = 0$

$\therefore \quad \mathbf{x} + \mathbf{y} \in W_1$

したがって、W_1は線形部分空間である。

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

基底は$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$で、次元は 2 である。

② $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 - x_2 + x_3 = 1, y_1 - y_2 + y_3 = 1$

$(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) = 2$

$\therefore \quad \mathbf{x} + \mathbf{y} \notin W_2$

したがって、W_2は線形部分空間でない。

【２】ベクトル$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$から、グラム・シュミットの直交化法を利用して、正規直交系を作れ。

（解答）$\mathbf{a}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad \mathbf{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \therefore \quad \mathbf{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

【３】ベクトル$\mathbf{a} = {}^t[2,1,1], \mathbf{b} = {}^t[1,3,1]$に直交する単位ベクトルを求めよ。

（解答）$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad \pm \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

【４】行列$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$からできる線形写像$\varphi_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$の像と核の次元と基底を求めよ。

（解答）$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$とする。

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 \in \mathrm{Im}\,\varphi_A = K < \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 >$$

$\mathrm{Im}\,\varphi_A = \mathbf{K} < \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 >$ ：像

掃き出し法によって、

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

したがって、像は３次元で基底は$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$

次元定理により、核は０次元である。

【５】行列$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$の固有値と固有ベクトルを求めよ。

（解答）$\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)+1 = \lambda^2 - 3\lambda + 3 = 0$

$$\therefore \quad \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-12}}{2} = \frac{3 \pm i\sqrt{3}}{2}$$ ：固有値

$$\lambda = \frac{3+i\sqrt{3}}{2} : \begin{bmatrix} \frac{1+i\sqrt{3}}{2} & -1 \\ 1 & -\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\to \frac{1+i\sqrt{3}}{2} x_1 - x_2 = 0 \left(x_1 - \frac{1-i\sqrt{3}}{2} x_2 = 0 \right) \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \frac{3-i\sqrt{3}}{2} : \begin{bmatrix} \frac{1-i\sqrt{3}}{2} & -1 \\ 1 & -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\to \frac{1-i\sqrt{3}}{2} x_1 - x_2 = 0 \left(x_1 - \frac{1+i\sqrt{3}}{2} x_2 = 0 \right) \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

したがって、固有ベクトルは、$\begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$および$\begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

【６】行列$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$が対角化できるかどうか判定して、対角化できるときには、正則行列Ｐを求めて、行列Ａを対角化せよ。

（解答）$\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)=0$

$\therefore \quad \lambda=1,2$

$$\lambda=1: \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=0 \quad \Rightarrow \quad x_3=0$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda=2: \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=0 \quad \Rightarrow \quad x_1-x_3=0, x_2-2x_3=0$$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=x_3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P=(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad AP = A(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, 2\mathbf{x}_3) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= P\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \therefore P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

【７】ケーリー・ハミルトンの定理を用いて行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ について A^{10} を求めよ。

（解答）$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda = 0$

$\therefore \quad A^2 = 2A$

$A^{10} = (A^2)^5 = 2^5 A^5 = 2^5 A^2 A^2 A = 2^7 A^2 A = 2^8 A^2 = 2^9 A$

$A^{10} = 2^9 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

【８】次の２次曲線の標準形を求めて曲線の種類が何であるか示せ。

$x^2 - \sqrt{3}xy + 2y^2 - 10 = 0$

（解答）$ax^2 + 2hxy + by^2 = \alpha u^2 + \beta v^2$

$\tan 2\theta = \dfrac{2h}{a - b}$ 　として

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ 　の変換をすればよい。

$\tan 2\theta = \dfrac{-\sqrt{3}}{1-2} = \sqrt{3} \quad \therefore 2\theta = \dfrac{\pi}{3}$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\dfrac{\pi}{6} & -\sin\dfrac{\pi}{6} \\ \sin\dfrac{\pi}{6} & \cos\dfrac{\pi}{6} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}u - v}{2} \\ \dfrac{u + \sqrt{3}v}{2} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad x^2 - \sqrt{3}xy + 2y^2$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}u - v}{2}\right)^2 - \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}u - v}{2}\right)\left(\frac{u + \sqrt{3}v}{2}\right) + 2\left(\frac{u + \sqrt{3}v}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(3u^2 - 2\sqrt{3}uv + v^2 - 3u^2 - 2\sqrt{3}uv + 3v^2 + 2u^2 + 4\sqrt{3}uv + 6v^2\right)$$

$$= \frac{1}{4}(2u^2 + 10v^2) = \frac{1}{2}(u^2 + 5v^2) = 10$$

$$\therefore \quad \frac{u^2}{(2\sqrt{5})^2} + \frac{v^2}{2^2} = 1$$ ： 楕円