線形代数 10 練習問題 A

2010．12．21

問題１：下記の空間ベクトル $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ について問に答えよ。

$\mathbf{a}_1={}^t[1\quad 2\quad 3],\mathbf{a}_2={}^t[3\quad 4\quad 5],\mathbf{a}_3={}^t[5\quad 8\quad 11]$

① $\mathbf{R}<\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2>$ は、空間におけるある平面上のベクトルの全体を表す。この平面の方程式を求めよ。

② $\mathbf{a}_3=\mathbf{R}<\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2>$ を示せ。

③ $\mathbf{R}<\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2>=\mathbf{R}<\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3>$ を示せ。

問題２：次の $\mathbf{R}^3$ の部分集合は、$\mathbf{R}^3$ の線形部分空間かどうか調べよ。また、線形部分空間のときにはその基底と次元を求めよ。

$$W_1=\left\{\mathbf{x}={}^t[x_1\quad x_2\quad x_3]:x_1+2x_2+3x_3=0\right\}$$

$$W_2=\left\{\mathbf{x}={}^t[x_1\quad x_2\quad x_3]:x_1+2x_2+3x_3=1\right\}$$

問題３：次の $\mathbf{R}^4$ の集合に対して、$W_1,W_2,W_1\cap W_2,W_1+W_2$ の基底と次元を求めよ。

$$W_1=\left\{{}^t[x_1\quad x_2\quad x_3\quad x_4]:x_1-2x_2+x_3=0,\ \ x_2-2x_3+x_4=0\right\}$$

$$W_2=\left\{{}^t[x_1\quad x_2\quad x_3\quad x_4]:x_1=x_2=x_4\right\}$$

問題４：グラム・シュミットの直交化法により正規直交系をつくれ.

①次の $\mathbf{R}^3$ のベクトルから正規直交系を作れ。

$\mathbf{x}_1={}^t[1\quad 1\quad 1],\mathbf{x}_2={}^t[1\quad 3\quad 1],\mathbf{x}_3={}^t[1\quad 1\quad 3]$

② 区間 $[0,1]$ で定義された多項式 f,g に対して内積を $(f,g)=\int_0^1 f(x)g(x)dx$ のように定義する。この時、$p_0(x)=1,p_1(x)=x$ から、グラム・シュミットの直交化法により、正規直交系を作れ。

問題５：ベクトル $\mathbf{a}={}^t[3\quad 1\quad 1],\mathbf{b}={}^t[1\quad 3\quad 1]$ に直交する単位ベクトルを求めよ。

問題６：次の行列 A からできる線形写像 $\varphi_A(\mathbf{x})=A\mathbf{x}$ の像と核の次元と基底を求めよ。

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\\-1&-1&1&1\end{bmatrix}$$