行列代数　小テスト②

２０１０年６月３日

１．次の行列の積を計算せよ。

$$A = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d & 0 \\ d & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

２．ｎ次正方行列Ａに対して次の等式が成立することを示せ。

$$E - A^4 = (E + A^2)(E + A)(E - A)$$

３．次の行列Xに対してX^nを求めよ。

$$X = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

４．次の行列Ａを対称行列と交代行列の和で表す。この対称行列と交代行列を示せ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

５．m次の単位行列をE_m、m次の零行列をO_mで表す。

この時下に示す行列ＡについてA^nを求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} O_m & E_m \\ E_m & O_m \end{pmatrix}$$

行列代数　小テスト②解答

1．$A = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d & 0 \\ d & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ax+dy \\ dx+by \\ cz \end{pmatrix}$

$= x(ax+dy) + y(dx+by) + cz = ax^2 + 2dxy + by^2 + cz^2$

2．右辺：$= (E+A^2)(E^2 - EA + AE - A^2)$

$EA = AE, E^2 = E$ であるので、

$= (E+A^2)(E-A^2) = (E - EA^2 + A^2E - A^4) = E - A^4$

3．$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおく。$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$

$X = \alpha E + A$ とかける。

$X^2 = (\alpha E + A)^2 = \alpha^2 E + \alpha EA + A\alpha E + A^2 = \alpha^2 E + 2\alpha A$

$X^3 = (\alpha E + A)^3 = (\alpha E + A)(\alpha^2 E + 2\alpha A) = \alpha^3 E + 3\alpha^2 A$

一般に次のようになりそうである。

$X^n = \alpha^n E + (n-1)\alpha^{n-1} A$、ｎ＝１で成り立つ。ｎについてこの式が成り立つとする。

$X^{n+1} = (\alpha E + A)(\alpha^n E + (n-1)\alpha^{n-1} A) = \alpha^{n+1} E + \alpha^n A + (n-1)\alpha^{n-1} A + (n-1)\alpha^{n-1} A^2$

$= \alpha^{n+1} E + n\alpha^n A$

したがって、上式は成り立つ。

4．$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

S: 対称行列、N: 交代行列、は次の通り。

$S = \frac{1}{2}(A + {}^tA) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} \quad N = \frac{1}{2}(A - {}^tA) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A = S + N$

5．O_m、E_m はm次正方行列なので、$O_m E_m = E_m O_m = O_m$、$O_m^2 = O_m$、$E_m^2 = E_m$ である。

$$A^2 = \begin{pmatrix} O_m & E_m \\ E_m & O_m \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} O_m^2 + E_m^2 & O_m E_m + E_m O_m \\ E_m O_m + O_m E_m & E_m^2 + O_m^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_m & O_m \\ O_m & E_m \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} O_m & E_m \\ E_m & O_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_m & O_m \\ O_m & E_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O_m E_m + E_m O_m & O_m^2 + E_m^2 \\ E_m^2 + O_m^2 & E_m O_m + O_m E_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O_m & E_m \\ E_m & O_m \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad n = 2p: \quad A^n = \begin{pmatrix} E_m & O_m \\ O_m & E_m \end{pmatrix}, \quad n = 2p+1: \quad A^n = \begin{pmatrix} O_m & E_m \\ E_m & O_m \end{pmatrix}$$