行列代数　小テスト③

２０１０年６月２４日

１．（１）A, Bが行列の時、次式は正しいか正しくないか述べよ。

$$(A-B)(A+B)=A^2-B^2$$

（２）行列A, Bが次のように与えられる時、行列(A-B)(A+B)を求めよ。

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

２．次の行列 X に対して、行列 X^n を求めよ。また、これを証明せよ。

$$X=\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

３．次のAを対称行列と交代行列の和で表せ。

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

４．行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ に対して、$PAQ=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となるP, Qを求めよ。

５．次の連立一次方程式を解け。

$$2x_1+x_2+x_3=4$$
$$x_1+2x_2+x_3-x_4=4$$
$$x_1+x_2+2x_3+x_4=4$$

６．行列 $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ のランクを求めよ。

行列代数　小テスト③解答

１． $(A-B)(A+B)=A^2-BA+AB-B^2$ なので、$AB=BA$（交換法則が成立つ）の時正しい。

$$AB=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}, BA=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}, A^2=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}, B^2=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad (A-B)(A+B)=\begin{pmatrix}-1&-2\\2&1\end{pmatrix}$$

２． $X=\begin{pmatrix}\alpha&1\\0&\alpha\end{pmatrix}, X^2=\begin{pmatrix}\alpha^2&2\alpha\\0&\alpha^2\end{pmatrix}, X^3=\begin{pmatrix}\alpha^3&3\alpha^2\\0&\alpha^3\end{pmatrix}$

一般に、$X^n=\begin{pmatrix}\alpha^n&n\alpha^n\\0&\alpha^n\end{pmatrix}$となりそうである。n=1でこの式は成り立つ。

一般のnでこの式が成り立つとする。

$$X^{n+1}=\begin{pmatrix}\alpha&1\\0&\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha^n&n\alpha^n\\0&\alpha^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha^{n+1}&(n+1)\alpha^{n+1}\\0&\alpha^{n+1}\end{pmatrix}$$

したがって、一般のnでこの式が成り立つ。

３． $A=\frac{1}{2}(A+{}^tA)+\frac{1}{2}(A-{}^tA)=P+Q$

$$P=\frac{1}{2}(A+{}^tA)=\begin{pmatrix}1&1.5&2\\1.5&2&2.5\\2&2.5&3\end{pmatrix}$$ ：対称行列

$$Q=\frac{1}{2}(A-{}^tA)=\begin{pmatrix}0&-0.5&-1\\0.5&0&-0.5\\1&0.5&0\end{pmatrix}$$ ：交代行列

４． $A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix}\to P_2(2,1;1)\to\begin{pmatrix}1&1\\0&3\end{pmatrix}\to P_2(2;1/3)\to\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

$$\to P_2(1,2;-1)\to\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad P=P_2(1,2;-1)P_2(2;1/3)P_2(2,1;1)=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/3&-1/3\\1/3&1/3\end{pmatrix}$$

$$Q=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

５． $\begin{pmatrix}2&1&1&0&4\\1&2&1&-1&4\\1&1&2&1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&-1&4\\2&1&1&0&4\\1&1&2&1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&-1&4\\0&-3&-1&2&-4\\0&-1&1&2&0\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore \quad x_1 = 1, \quad x_2 - x_4 = 1, \quad x_3 + x_4 = 1, \quad x_4 = x_4 = t$

$$\therefore \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6. $a = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \therefore rankA = 2$$

$a \neq 0$

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 1/a \\ 1 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1/a \\ 0 & a - 1/a \end{pmatrix}$$

$a = 1$

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore rankA = 1$$

$a \neq 1$

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 1/a \\ 0 & a - 1/a \end{pmatrix} \quad \therefore rankA = 2$$