行列代数　小テスト④

２０１０年７月２２日

１．定数aに関する次の連立一次方程式を解け。

$$
\begin{aligned}
&2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\
&x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\
&x_1 + x_2 = a
\end{aligned}
$$

２．順列　$\sigma = (2,4,5,1,3)$　について、

①　転倒数、符号、逆順列　σ^{-1}　を求めよ。

②　順列　σ　を表すアミダクジを一つ示せ。

３．次の行列式　$|A|$、$|B|$　の値を求めよ。

①　$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$、②　$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

４．次の行列式を因数分解せよ。

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

５．次の行列の逆行列を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

行列代数　小テスト④解答

１．掃き出し法で変形する。

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 2 \\ 0 & -3/2 & 3/2 & -3 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & a-2 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2a-4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2a-6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{bmatrix}$$

$a \neq 3$：解なし

$a = 3$：$x_1 + x_3 = 1,\ \ -x_2 + x_3 = -2,\ \ x_3 = x_3$、tを任意のパラメータとして、

$$\therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

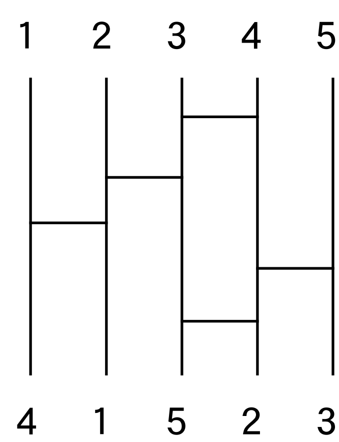
２．①　転倒数：N=1+2+2+0=5

符号　：負

逆順列：$\sigma = (2,4,5,1,3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\therefore \quad \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (4,1,5,2,3)$$

②　アミダクジ：



$$\begin{array}{ccccccc} 2 & 4 & 5 & 1 & 3 & & (4,3) \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 & & (5,4) \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & & (2,1) \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 & & (3,2) \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 & & (4,3) \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & \end{array}$$

$\therefore \quad \sigma = (2,4,5,1,3) = (4,3)(5,4)(2,1)(3,2)(4,3)$

したがって、アミダクジは図のようになる。

３．　＊１行目に２行目を加える。

＊２，３行目から一行目を引く。

＊２次行列式に直す。

＊１行目に２行目を加える。

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -2 \\ 7 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

＊２，３，４行目から１行目を引く。

＊２次行列式に直す。

＊１行目に２行目を加える。

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2^3$$

４．　＊１行目に２，３行目を加える。

＊２，３列目から１列目を引く。

＊２次行列式に直す。

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & a-c & b-c \\ b & c-b & a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} a-c & b-c \\ c-b & a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\big((a-c)(a-b)-(b-c)(c-b)\big)$$

$$= (a+b+c)(a^2+bc-ab-ac-bc-cb+b^2+c^2) = \frac{1}{2}(a+b+c)\big((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\big)$$

５．　$A_{11} = d,\quad A_{12} = -c,\quad A_{13} = 0$

$A_{21} = -b,\quad A_{22} = a,\quad A_{23} = 0$

$A_{31} = 0,\quad A_{32} = 0,\quad A_{33} = ad-bc$

$|A| = ad-bc$

$$\therefore\quad A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b & 0 \\ -c & a & 0 \\ 0 & 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$