１４　線形空間概要

- １４．１　線形空間
- １４．２　線形空間の例

１４．１　線形空間

<u>線形空間</u>

線形空間の基礎体＊（係数体）	$\mathbf{K}$
線形空間の基礎体が実数	$\mathbf{K}=\mathbf{R}$
線形空間の基礎体が複素数	$\mathbf{K}=\mathbf{C}$
集合	V
集合の要素	$x \quad : x \in V$
集合の要素部分集合	$W \quad : W \subset V$

＊体、基礎体等についてはこれ以上述べない

＊線形空間の性質

集合Vにおいて、①、②が定義され、１）から８）の性質が成立するときVはK上の線形空間である。

① 和の定義　$x+y \in V,\quad for\quad x \in V, y \in V$

② 積の定義　$\alpha x \in V,\quad for\quad \alpha \in \mathbf{K}, x \in V$

以下、　$for\quad x,y,z \in V\quad and\quad \alpha,\beta \in \mathbf{K}$

１）交換法則　$x+y=y+x$

２）結合法則１　$(x+y)+z=x+(y+z)$

３）零元の存在　$x+0=x$　（ただ一つの０）

４）逆元の存在　$for\ {}^{\forall}x\quad x+y=0\quad {}^{\exists}y \in V$　（ただ一つのy）

５）分配法則１　$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta y$

６）分配法則２　$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$

７）結合法則２　$(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$

８）単位元の存在　$1x=x$

＊線形部分空間

K上の線形空間Vの部分集合Wが空集合でなく、次の二つの条件を満たせとき、WはVの線形部分空間という。

①　$x \in W, y \in W \Rightarrow x+y \in W$

②　$\alpha \in K, x \in W \Rightarrow \alpha x \in W$

定理１．１：K上の線形部分空間Vの部分集合WはK上の線形空間である。

⇒証明（Wが線形空間の性質を満たすこと）

零元：　$1x=(1+0)x=1x+0x,\quad \therefore 0x=0$

逆元：　$1x+(-1)x=(1+(-1))x=0x=0,$

$\therefore x+(-1)x=1x+(-1)x=0,\quad \therefore (-1)x=-x$

問題１．１： $\alpha\mathbf{0}=\mathbf{0}$

$$\alpha\mathbf{0}=\alpha(\mathbf{0}+\mathbf{0})=\alpha\mathbf{0}+\alpha\mathbf{0} \quad \therefore \alpha\mathbf{0}=\mathbf{0}$$

問題１．２： ${}^\forall\mathbf{x},{}^\forall\mathbf{y}\in V$ について

$\mathbf{x}+\mathbf{z}=\mathbf{y}$ 　となるＺがただ一つ存在する

$$-\mathbf{x}+(\mathbf{x}+\mathbf{z})=-\mathbf{x}+\mathbf{y}$$
$$\therefore (-\mathbf{x}+\mathbf{x})+\mathbf{z}=-\mathbf{x}+\mathbf{y}$$
$$\therefore \mathbf{z}=-\mathbf{x}+\mathbf{y}\in V$$

問題１．３： 線形部分空間は０を含む。

for $\mathbf{x}$

$$\mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{x}$$

例題１．２：有限個の要素で張られる空間

K上の線形空間Vの要素 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots\mathbf{a}_n$ に対して

$$\mathbf{K}\langle\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots\mathbf{a}_n\rangle=\{\alpha_1\mathbf{a}_1+\alpha_2\mathbf{a}_2+\ldots+\alpha_n\mathbf{a}_n:\alpha_1\in\mathbf{K},\ldots\alpha_n\in\mathbf{K}\}$$

は線形部分空間である。また、このとき $\mathbf{K}\langle\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots\mathbf{a}_n\rangle$ は、$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots\mathbf{a}_n$ で張られる線形部分空間という。

$$\mathbf{x}=\alpha_1\mathbf{a}_1+\cdots+\alpha_n\mathbf{a}_n \qquad \alpha_1,\ldots\alpha_n\in\mathbf{K}$$
$$\mathbf{y}=\beta_1\mathbf{a}_1+\cdots+\beta_n\mathbf{a}_n \qquad \beta_1,\ldots\beta_n\in\mathbf{K}$$
$$\Rightarrow \quad \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{K}<\mathbf{a}_1,\ldots\mathbf{a}_n>$$
$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=(\alpha_1+\beta_1)\mathbf{a}_1+\cdots+(\alpha_n+\beta_n)\mathbf{a}_n$$
$$\alpha\mathbf{x}=(\alpha\alpha_1)\mathbf{a}_1+\cdots+(\alpha\alpha_n)\mathbf{a}_n$$
$$\therefore \quad \mathbf{x}+\mathbf{y},\alpha\mathbf{x}\in\mathbf{K}<\mathbf{a}_1,\ldots\mathbf{a}_n>$$

したがって、$\mathbf{K}<\mathbf{a}_1,\ldots\mathbf{a}_n>$ は線形部分空間である。

問題１．４：

空間ベクトル $\mathbf{a}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ \mathbf{a}_2=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix},\ \mathbf{a}_3=\begin{pmatrix}4\\7\\10\end{pmatrix}$ に対して

① $\mathbf{R}<\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2>$ はこの空間における平面上のベクトル全体を表す。この平面の方程式を求めよ。

$ax+by+cz=0$：平面の方程式

$$a+2b+3c=0$$

$$2a+3b+4c=0$$

$$\therefore\quad b=-2c,a=c\quad\Rightarrow\quad x-2y+z=0$$

② $\mathbf{a}_3\in\mathbf{R}<\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2>$ を示せ。

$\mathbf{a}_3=2\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2$

③ $\mathbf{R}<\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2>=\mathbf{R}<\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3>$ を示せ。

$\mathbf{a}_3$ は $\mathbf{a}_1$ と $\mathbf{a}_2$ の線形結合だから。

１４．２　線形空間の例

＊行列の作る線形空間

$M_{m,n}(\mathbf{K})$： Ｋの要素からなる（m，ｎ）行列の全体：：Ｋ上の線形空間

$M_{m,n}(\mathbf{R})$： 実数からなる　（m，ｎ）行列の全体：：Ｒ上の線形空間

$M_{m,n}(\mathbf{C})$： Ｃの要素からなる（m，ｎ）行列の全体：：C上の線形空間

＊ベクトルの作る線形空間

$\mathbf{K}^n$： Ｋの要素からなるｎ次列ベクトルの全体：：Ｋ上の線形空間

$\mathbf{R}^n$： ｎ次実列ベクトルの全体：：Ｒ上の線形空間

$\mathbf{C}^n$： ｎ次複素列ベクトルの全体：：Ｒ上の線形空間

$\mathbf{C}^n$： ｎ次複素列ベクトルの全体：：Ｃ上の線形空間

＊関数の作る線形空間

$F(0,1)$： 実数値区間（０、１）で定義された実数値関数全体：：Ｒ上の線形空間

$C(0,1)$： 〜全〜　実数値連続関数の全体：：Ｒ上の線形空間

$C^1(0,1)$： 〜全〜　実数値連続微分可能な関数全体：：Ｒ上の線形空間

$C^1(0,1)\subset C(0,1)\subset F(0,1)$

例題２．１：線形部分空間の例

次の $\mathbf{R}^3$ の部分集合は $\mathbf{R}^3$ の線形部分空間かどうか調べよ。

（１）　$W_1 = \{\mathbf{x} : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

（２）　$W_2 = \{\mathbf{x} : x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$

$$\mathbf{x}={}^t[x_1 \quad x_2 \quad x_3], \mathbf{y}={}^t[y_1 \quad y_2 \quad y_3] \in W_1$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad y_1 + y_2 + y_3 = 0$$
$$\therefore \quad (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) = 0$$
$$\therefore \quad \mathbf{x} + \mathbf{y} \in W_1$$
$$(\alpha x_1) + (\alpha x_2) + (\alpha x_3) = \alpha(x_1 + x_2 + x_3) = 0$$
$$\therefore \quad \alpha\mathbf{x} \in W_1$$

W_1 は $\mathbf{R}^3$ の線形部分空間である。

$$\mathbf{x}={}^t[1 \quad 0 \quad 0] \in W_2$$
$$2\mathbf{x} = {}^t[2 \quad 0 \quad 0] \notin W_2$$

W_2 は $\mathbf{R}^3$ の線形部分空間でない。

問題２．１：

次の集合は $\mathbf{R}^3$ の線形部分空間かどうか調べよ。

（１）　$W_1 = \{\mathbf{x} : x_1 = 0\}$

（２）　$W_2 = \{\mathbf{x} : x_1 > 0\}$

$$\mathbf{x}={}^t[0 \quad x_2 \quad x_3], \quad \mathbf{y}={}^t[0 \quad y_2 \quad y_3] \in W_1$$
$$\mathbf{x} + \mathbf{y}={}^t[0 \quad x_2 + y_2 \quad x_3 + y_3] \in W_1$$

W_1 は $\mathbf{R}^3$ の線形部分空間である。

$$\mathbf{x} \in W_1 \quad \rightarrow \quad x_1 > 0$$
$$\alpha < 0 \quad \alpha x_1 < 0$$
$$\therefore \quad \alpha\mathbf{x} \notin W_2$$

W_2 は $\mathbf{R}^3$ の線形部分空間でない。

１５．まとめ

- １　授業概要、数と集合
- ２　行列とその基本演算１：行列の和と積
- ３　行列とその基本演算２：その他の演算
- ４　行列とベクトル
- ５　行列の応用
- ６　連立一次方程式１：基本概念
- ７　連立一次方程式２：基本変形
- ８　連立一次方程式３：具体的解法
- ９　行列式：順列と行列式
- １０　行列式と差積
- １１　行列式の基本的性質
- １２　余因子と逆行列
- １３　行列計算法
- １４　線形空間概要

（１）数と集合

■集合と写像

集合、要素、要素についての条件

部分集合、空集合

和集合、共通部分（関集合）

写像（対応、関数）、定義域、値域、像

■実数

自然数、整数、有理数、無理数

数学的帰納法

■複素数

複素数の定義と演算

絶対値、極形式表現

（2）行列とその基本演算１：行列の和と積

▪行列の定義

行、列

実行列、複素行列

▪行列の演算

行列の和、行列の差、行列と数の積

零行列、逆元

交換法則、結合法則（２種）、分配法則（２種）

零行列、逆元、単位元

（3）行列とその基本演算２：その他の演算

▪行列の積

定義、行列とグラフ

▪和の順序の交換

▪積に関する基本定理

分配法則、結合法則、交換法則

単位行列

（4）行列とベクトル

▪転置行列

定義、実正方行列、対称行列、交代行列

▪行ベクトル、列ベクトル

（５）行列の応用

- 行列の分割
  行列の分割、小行列
- 行列の応用例
  ハンガリー法、確率と行列

（６）連立一次方程式１：基本概念

- 連立一次方程式
  掃き出し法
  ガウスの消去法
- 連立一次方程式の解法
  行列の基本変形
  同値である連立一次方程式
  ランク

（７）連立一次方程式２：基本変形

- 基本変形の行列
- 連立一次方程式の解法（解が無数にある時）

（８）連立一次方程式３：具体的解法

- 連立一次方程式の解法（解がない時）
  - 文字を含む方程式
  - データ当てはめ

（９）行列式：順列と行列式

- 順列
  - ｎ次の順列
  - 順列と置換
  - 転倒数
- 行列式
  - 定義、行列式と連立一次方程式の解
  - サラスの方法

（１０）行列式と差積

- 差積
  - 定義
  - アミダクジと順列

（１１）行列式の基本的性質

- 行列式の基本的性質
  - 転置行列の行列式
  - 行列式の線形性
  - 行または列の入れ替え、基本変形と行列式
  - 行列式計算法
  - 行列式の展開、行列式の因数分解

（１２）余因子と逆行列

- 余因子
  - 余因子、余因子行列
- 逆行列
  - 正則、逆行列
  - 分割行列の逆行列

（１３）行列計算法

- クラメルの公式
- 掃き出し法による逆行列計算

（１４）線形空間概要

- 線形空間
  - 線形空間
  - 線形空間の性質
  - 線形部分空間
- 線形空間の例
  - 行列の作る線形空間
  - ベクトルの作る線形空間
  - 関数の作る線形空間